

# Chapitre 42

## Fonctions de deux variables

### Plan du chapitre

<b>1</b>	<b>Graphes d'une fonction de deux variables</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduction à la topologie de <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>3</b>
2.1	Boules ouvertes	3
2.2	Ouvert de $\mathbb{R}^2$	4
2.3	Limite finie en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	5
2.4	Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	6
<b>3</b>	<b>Dérivée directionnelle et dérivée partielle</b>	<b>8</b>
3.1	Dérivée directionnelle (selon un vecteur)	8
3.2	Dérivée partielle, calcul "ponctuel"	10
3.3	Dérivée partielle, calcul "global"	11
<b>4</b>	<b>Fonction de classe <math>\mathcal{C}^1</math></b>	<b>12</b>
4.1	Définition	12
4.2	Gradient et retour sur la dérivée directionnelle	14
4.3	Interprétations du gradient	16
<b>5</b>	<b>Règle de la chaîne</b>	<b>17</b>
5.1	Dérivée de $f \circ g$ avec $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$	17
5.2	Dérivée de $f \circ g$ avec $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$	18
5.3	Dérivée de $f \circ g$ avec $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$	19
5.4	Exemples applicatifs	19
<b>6</b>	<b>Extrema locaux</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Méthodes pour les exercices</b>	<b>24</b>

#### Hypothèse

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure d'espace euclidien : on notera  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne et  $d$  la distance euclidienne.

$\Omega$  désigne un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$  (cf plus loin pour une définition).  $I$  désigne un intervalle ouvert non trivial de  $\mathbb{R}$ .

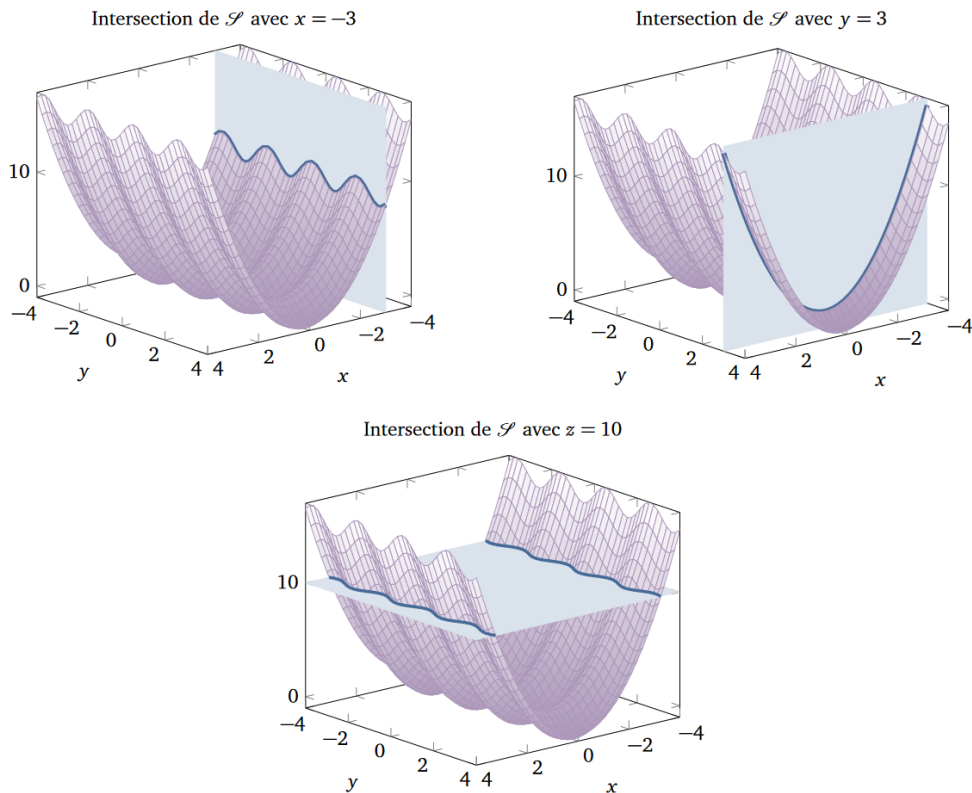
### 1 Graphes d'une fonction de deux variables

Il est usuel de représenter une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou plutôt son graphe) par une courbe d'équation  $y = f(x)$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on la représentera dans  $\mathbb{R}^3$  par une surface d'équation  $z = f(x, y)$ .



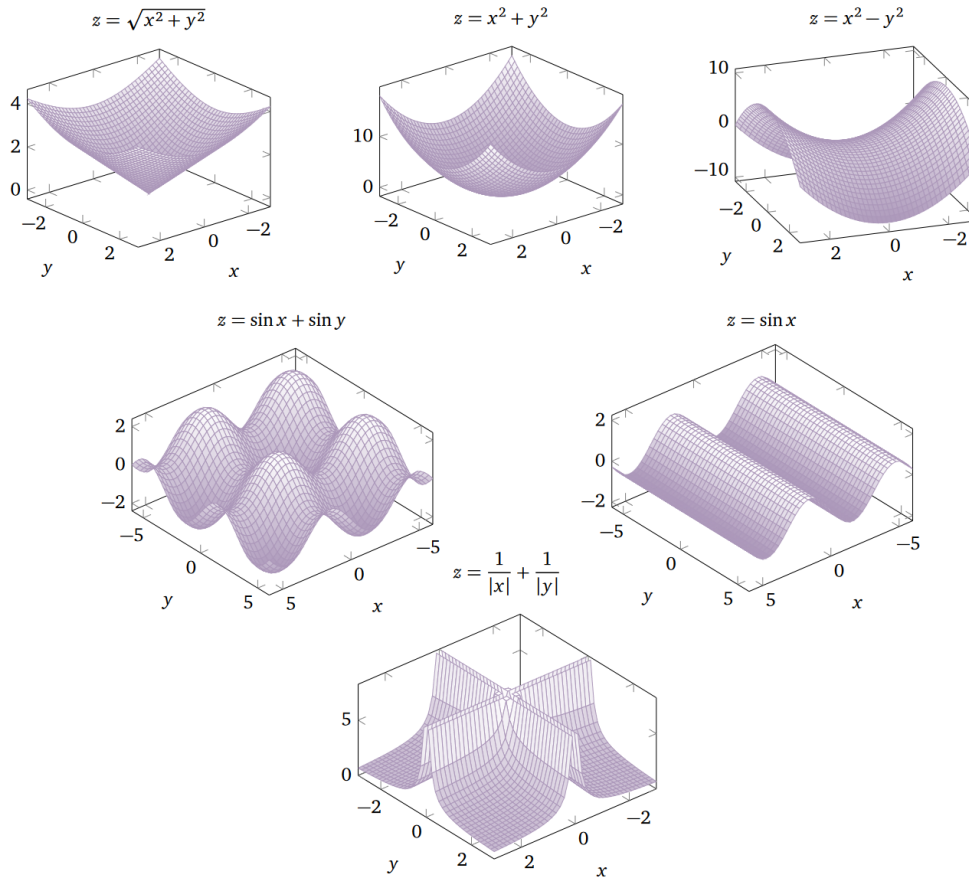
**Exemple 1.** Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + \sin(3y)$ . Pour construire / se représenter mentalement son graphe (ou sa surface)  $\mathcal{S}$  en 3D, il est fréquent de réaliser des “coupes” de cette surface par des plans qui balayent l’espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier. Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

- L’intersection de  $\mathcal{S}$  avec le plan d’équation  $x = \lambda$  est la courbe d’équation  $z = f(\lambda, y) = \lambda^2 + \sin(3y)$  dans ce plan. C’est donc une sinusoïde.
  - Avec  $\lambda = -3$ , on a donc la courbe d’équation  $z = 9^2 + \sin(3y)$ , cf dessin ci-dessous.
- L’intersection de  $\mathcal{S}$  avec le plan d’équation  $y = \lambda$  est la courbe d’équation  $z = f(x, \lambda) = x^2 + \sin(3\lambda)$  dans ce plan. C’est donc une parabole.
  - Avec  $\lambda = 3$ , on a donc la courbe d’équation  $z = x^2 + \sin(9)$ , cf dessin ci-dessous.



- L’intersection de  $\mathcal{S}$  avec le plan d’équation  $z = \lambda$  est la courbe d’équation  $\lambda = f(x, y) = x^2 + \sin(3y)$  dans ce plan.
  - Avec  $\lambda = 10$ , on a donc  $x^2 = 10 - \sin(3y)$  : l’intersection est donc la réunion de la courbe  $x = \sqrt{10 - \sin(3y)}$  et de  $x = -\sqrt{10 - \sin(3y)}$ .

**Exemple 2.** Voici d’autres exemples de surfaces :



## 2 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^2$

### 2.1 Boules ouvertes

Étant donné  $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , on note

$$\begin{aligned} AM &= d(A, M) = \|M - A\| \\ &= \|(x - x_0, y - y_0)\| \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned}$$

Il s'agit de la distance "usuelle" entre deux points.

#### Définition 42.1

Soit  $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ . On appelle boule ouverte de centre  $A$  et de rayon  $r$  l'ensemble noté

$$\mathcal{B}(A, r) := \{M \in \mathbb{R}^2 \mid AM < r\}$$

et on appelle boule fermée de centre  $A$  et de rayon  $r$  l'ensemble noté

$$\overline{\mathcal{B}}(A, r) := \{M \in \mathbb{R}^2 \mid AM \leq r\}$$

On écrira parfois  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(A, r)$  pour rappeler qu'il s'agit d'une boule dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut reformuler la définition avec

la norme de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(A, r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , ces “boules” représentent en fait des disques (comme ce qu’on a vu dans  $\mathbb{C}$  avec les disques ouverts ou fermés). Toutefois, ce formalisme se généralise sans difficulté à  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 3$ , donc on introduit dès cette année ce vocabulaire.

De même, pour tout réel  $x_0$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x_0, r) &= \dots\dots\dots \\ \overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}}(x_0, r) &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

## 2.2 Ouvert de $\mathbb{R}^2$

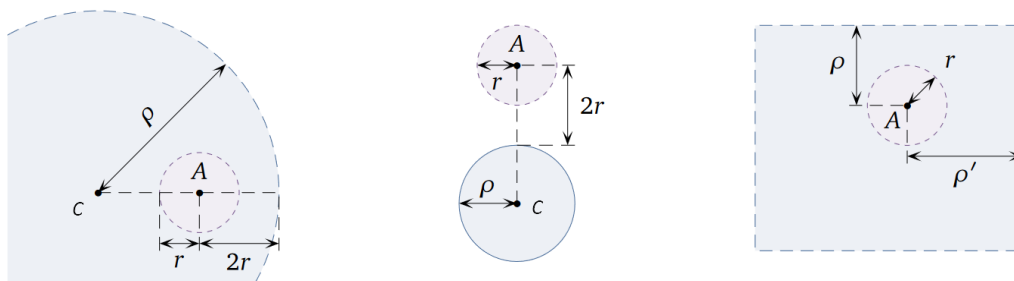
### Définition 42.2 – Ouvert

Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $\Omega$  est (un) ouvert si :

Cela revient à dire que  $\Omega$  est un voisinage de chacun de ces points. Bien entendu, le rayon  $r$  de la boule dépend du point  $A$  considéré.

- Exemple 3.**
- Toute boule ouverte est un ouvert.
  - Le complémentaire d’une boule fermée est un ouvert.
  - Si  $I$  et  $J$  sont des intervalles ouverts, alors  $I \times J$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$

La preuve consiste à chaque fois à prendre un point quelconque  $A$  de ces ensembles et de déterminer  $r > 0$  tel que  $\mathcal{B}(A, r)$  est contenu dans cet ensemble. On se contentera d’un dessin pour se donner l’intuition géométrique de la preuve.



À gauche :  $\Omega = \mathcal{B}(C, \rho)$ . Au milieu :  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{B}}(C, \rho)$ . À droite :  $\Omega$  sous la forme d’un rectangle.

### 2.3 Limite finie en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On rappelle que dans ce chapitre, on suppose que  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Définition 42.3 – Limite finie en un point

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soit  $A \in \Omega$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $A$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall M \in \Omega \quad AM < r \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon$$

En posant  $M = (x, y)$  et  $A = (x_0, y_0)$ , on peut réécrire l'assertion de la définition ci-dessus en :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

**Notation.** Lorsque  $f$  tend vers  $\ell$  en  $A$ , on notera

$$\lim_A f = \lim_{M \rightarrow A} f(M) = \ell$$

ou encore, en posant  $M = (x, y)$  et  $A = (x_0, y_0)$  :

$$\lim_{(x_0, y_0)} f = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$$

On pourrait également définir le cas d'une limite  $+\infty$  ou  $-\infty$  en un point, mais cela n'est pas l'objet du chapitre.

#### Théorème 42.4

La majorité des résultats vus pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  restent valides pour les fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  : unicité de la limite, opérations sur les limites (combinaison linéaire, produit, quotient, composition à gauche avec une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ), passage dans une inégalité large / stricte, théorème d'encadrement.

*Démonstration.* Dans la majorité des cas, il suffit de remplacer les valeurs absolues de l'ensemble de départ par la norme de  $\mathbb{R}^2$ . □

Pour montrer qu'une fonction  $f : \boxed{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  n'admet pas de limite en un point  $a$  de  $D_f$ , on a vu deux méthodes :

- (Unicité de la limite :)
- (Caractérisation séquentielle de la limite :)

Ces deux méthodes se généralisent dans le cas d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pour montrer que  $f$  n'admet pas de limite en un point  $A = (x_0, y_0)$ . Pour simplifier, supposons  $A = (0, 0)$ . Il y a une subtilité essentielle quand on passe à une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :

- Un point  $M = (x, y)$  peut "tendre" vers  $(0, 0)$  de bien des manières : en restant selon la droite horizontale  $y = 0$ , selon la droite verticale  $x = 0$ , selon une droite oblique  $y = x$ , ou encore selon une parabole  $y = x^2$ , etc. Il y a donc d'autant plus de manières d'obtenir une contradiction.

**Méthode**

Pour montrer que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ , on exhibe deux suites de couples  $(x_n, y_n)$  et  $(x'_n, y'_n)$  qui tendent tous les deux vers  $(0, 0)$  mais pour lesquelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n, y'_n)$$

On peut aussi trouver deux valeurs distinctes parmi :

$$\begin{array}{ccccccc} f(0, 0) & \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) & \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) & \dots & & \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} f(0, y) & \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) & \lim_{x \rightarrow 0} f(-x, x) & \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) & \dots & & \end{array}$$

Pour les suites  $(x_n, y_n)$ , on peut prendre par exemple  $(\frac{1}{n}, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{n})$ , ou encore  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , qui tendent toutes vers  $(0, 0)$ .

**Exemple 4.** On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  n'a pas de limite en 0.

**2.4 Continuité d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$**

**Définition 42.5 – Continuité en un point**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soit  $A \in \Omega$ . On dit que  $f$  est continue en  $A$  si  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$ , c'est-à-dire :

En posant  $A = (x_0, y_0)$ , on peut réécrire  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$  d'une autre manière :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

**Définition 42.6 – Continuité sur une partie de  $\mathbb{R}^2$** 

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est continue sur  $\Omega$  si elle est continue en tout point de  $\Omega$ .  
On notera  $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$  ou juste  $\mathcal{C}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions réelles continues sur  $\Omega$ .

La majorité des résultats vus pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  restent valides.

**Théorème 42.7**

La combinaison linéaire, le produit, le quotient, la composition de fonctions continues est une fonction continue (là où la fonction est définie).

**Exemple 5.** Les fonctions  $f : (x, y) \mapsto x$  et  $g : (x, y) \mapsto y$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 42.8**

On appelle fonction polynômiale de deux variables toute fonction  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \\ &= a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + \dots + a_{m0}x^m \\ &\quad + (a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + \dots + a_{m1}x^m)y \\ &\quad \dots \\ &\quad + (a_{0n} + a_{1n}x + a_{2n}x^2 + \dots + a_{mn}x^m)y^n \end{aligned}$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}$  et  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  une famille de réels.

**Théorème 42.9**

Toute fonction polynômiale de deux variables est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* En faisant des produits des fonctions  $f$  et  $g$  de l'Exemple 5, on peut montrer que toute fonction de la forme  $(x, y) \mapsto x^i y^j$  avec  $i \in \mathbb{N}$  et  $j \in \mathbb{N}$  est continue. Par combinaisons linéaires, toute fonction polynômiale en  $x$  et  $y$  est continue.  $\square$

**Exemple 6.** La fonction

$$P : (x, y) \mapsto -4x^3y + 2y^2 - xy^4 + 1$$

est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 7.** La norme  $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### 3 Dérivée directionnelle et dérivée partielle

#### 3.1 Dérivée directionnelle (selon un vecteur)

On aimerait définir la dérivée d'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de manière similaire au cas d'une fonction à une variable. On pourrait être tenté de définir le nombre dérivée de manière similaire à  $\mathbb{R}$  :

$$” \lim_{M \rightarrow A} \frac{f(M) - f(A)}{M - A} ” \quad (\text{absurde !!})$$

Mais il y a plusieurs problèmes. D'une part, on divise par  $M - A \in \mathbb{R}^2$  ce qui n'a pas de sens. D'autre part, même pour des fonctions  $f$  très “gentilles”, cette limite n'est pas forcément unique, car cela dépend de la manière dont  $M$  tend vers  $A$ . La définition qui suit permet toutefois de se ramener au cas réel en imposant à  $M$  de tendre vers  $A$  en restant dans la même “direction”.

Dans la définition ci-dessous, on emploie volontairement une notation vectorielle  $\vec{v}$  mais cela est purement arbitraire.

#### Définition 42.10 – Dérivée directionnelle selon un vecteur

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = (x_0, y_0) \in \Omega$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $A$  dans la direction  $\vec{v}$  si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t}$$

existe et est finie. Lorsque c'est le cas, on appelle dérivée de  $f$  en  $A$  dans la direction  $\vec{v}$  le réel

$$D_{\vec{v}}f(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} \in \mathbb{R}$$

**Remarque** (Interprétation de  $D_{\vec{v}}f(A)$ ). Le réel  $D_{\vec{v}}f(A)$  représente la variation infinitésimale de la valeur de  $f$  lorsque vous bougez légèrement selon le vecteur  $\vec{v}$  en partant de  $A$  :

- $D_{\vec{v}}f(A) > 0$  signifie que pour un point  $A' = A + t\vec{v}$  avec  $t$  assez petit, on a  $f(A') > f(A)$ .
- $D_{\vec{v}}f(A) < 0$  signifie que pour un point  $A' = A + t\vec{v}$  avec  $t$  assez petit, on a  $f(A') < f(A)$ .
- $D_{\vec{v}}f(A) = 0$  signifie que pour un point  $A' = A + t\vec{v}$  avec  $t$  assez petit, on a  $f(A') \approx f(A)$  (au premier ordre en  $t$ ).

De plus, plus  $D_{\vec{v}}f(A)$  est grand en valeur absolue, plus la variation entre  $f(A')$  et  $f(A)$  est importante.

**Remarque.** On notera que comme  $A \in \Omega$  et  $\Omega$  est ouvert, le point  $A' = A + t\vec{v}$  est toujours dans  $\Omega$  pour  $t$  assez petit : la valeur  $f(A')$  est donc bien définie.

Une autre façon d'interpréter  $D_{\vec{v}}f(A)$  est de remarquer que si on pose  $F : t \mapsto f(A + t\vec{v})$ , alors  $D_{\vec{v}}f(A) = F'(0)$ .

**Exemple 8.** On pose  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Déterminer les dérivées directionnelles de  $f$  selon les vecteurs  $\vec{v}$  et aux points  $A$  suivants :

- Au point  $A = (0, 0)$ , selon le vecteur  $\vec{v} = (1, 0)$ .

- Au point  $A = (3, 4)$ , selon le vecteur  $\vec{v} = (0, 1)$ .

- Au point  $A = (3, 4)$ , selon le vecteur  $\vec{v} = (1, 2)$ .

- Au point  $A = (3, 4)$ , selon le vecteur  $\vec{v} = (10, 20)$  : on trouve  $D_{\vec{v}}f(A) = -100$

Comme l'illustre les deux derniers exemples ci-dessus,  $D_{\vec{v}}f(A)$  ne dépend pas seulement de la direction de  $\vec{v}$ , mais est aussi proportionnel à la norme de  $\vec{v}$ .

### 3.2 Dérivée partielle, calcul "ponctuel"

La définition suivante n'est qu'un cas particulier de la dérivée directionnelle.

#### Définition 42.11

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $A = (x_0, y_0) \in \Omega$ .

- La dérivée directionnelle de  $f$  en  $A$  selon  $\vec{i} = (1, 0)$ , i.e.  $D_{\vec{i}}f(A)$ , lorsqu'elle existe, est appelée dérivée partielle en  $A$  selon  $x$ . On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

- La dérivée directionnelle de  $f$  en  $A$  selon  $\vec{j} = (0, 1)$ , i.e.  $D_{\vec{j}}f(A)$ , lorsqu'elle existe, est appelée dérivée partielle en  $A$  selon  $y$ . On la note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

**Notation.** Attention à bien utiliser des "d ronds" donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , et non des "d droits" tels que  $\frac{df}{dx}$ . Cette dernière notation est en général réservée aux fonctions d'une seule variable en mathématiques.

On pourrait calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  comme on calcule une dérivée directionnelle  $D_{\vec{v}}f(A)$  avec  $\vec{v} = (1, 0)$  ou  $\vec{v} = (0, 1)$ . Mais en pratique, on peut utilis

#### Méthode – Calcul ponctuel d'une dérivée

Pour calculer une dérivée partielle en un seul point  $(x_0, y_0)$ , on utilise la même méthode que pour calculer une dérivée directionnelle selon  $\vec{v} = (1, 0)$  ou  $\vec{v} = (0, 1)$  au point  $(x_0, y_0)$ .

**Exemple 9.** On définit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

On a vu que  $f$  n'est pas continue en 0. Montrer que (pourtant)  $f$  admet des dérivées partielles en  $(0, 0)$ .

### 3.3 Dérivée partielle, calcul “global”

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On a vu au premier semestre deux méthodes pour calculer la dérivée  $g'$  :

- **Calcul “ponctuel” en un point**  $x_0 \in \mathbb{R}$  : on calcule la limite du taux d’accroissement  $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  : cette limite est  $g'(x_0)$
- **Calcul “global” en tout point**  $x \in \mathbb{R}$  : on utilise des formules classiques de dérivation qui permettent de connaître  $g'(x)$  en tout réel  $x$  :

$$g(x) = x^2 + \sin x \implies g'(x) = 2x + \cos x$$

Puis, si on veut connaître  $g'(x_0)$ , il suffit de substituer  $x$  par  $x_0$ .

La Définition 42.11 est un analogue du taux d’accroissement pour calculer les dérivées partielles d’une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Cependant, on peut aussi calculer la dérivée partielle de  $f$  de manière “globale” avec les formules classiques de dérivation :

#### Méthode

Pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , on dérive l’expression  $f(x, y)$  selon  $x$ , en considérant  $y$  comme une constante. On obtient l’expression globale de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
Puis, si on veut connaître  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , il suffit de substituer  $x$  par  $x_0$  et  $y$  par  $y_0$ .

La méthode suit le même principe pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , sauf qu’on dérive selon  $y$  en considérant  $x$  comme une constante. Les formules de dérivation sont exactement les mêmes que pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (combinaison linéaire, produit, inverse, composition, etc.).

**Exemple 10.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2} + \sin(x)$ . On admet pour le moment que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ .



Dans l'écriture  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ , la lettre  $x$  est présente deux fois et joue alors deux rôles très différents :

- Dans “ $\partial x$ ”, elle précise qu'on dérive dans la direction  $x$ , ou encore selon le vecteur  $\vec{i} = (1, 0)$ .
- Dans “ $(x,y)$ ”, elle donne les coordonnées du point en lequel on évalue  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Dans l'exemple ci-dessus, on peut donc écrire, pour n'importe quel couple  $(a,b)$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{1+b^2} + \cos(a)$$

**Remarque.** Il n'est pas toujours possible de calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$  par les formules usuelles comme à l'Exemple 10. Si on reprend la fonction de l'Exemple 9 :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

- On ne peut pas calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  car il y a une disjonction de cas au voisinage de  $(0,0)$  : on ne dispose pas de formule usuelle pour cela.
- Mais, en tout point  $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ , il n'y a pas de disjonction de cas dans une petite boule autour de  $(x_0,y_0)$  : on peut donc appliquer les formules classiques pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  en tout point  $(x,y) \neq (0,0)$  :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dots\dots\dots$$

La notation  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (resp.  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ) signifie qu'on a dérivé  $f$  selon  $x$  (resp. selon  $y$ ). Cette notation est adaptée aux fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , mais d'autres notations plus générales existent (qu'on peut aussi utiliser pour des fonctions  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ) :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_2} & \left( \text{voire } \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \text{ si } f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \right) \\ \partial_1 f \text{ et } \partial_2 f & \left( \text{voire } \partial_3 f, \dots, \partial_m f \text{ si } f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \right) \end{array}$$

## 4 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

### 4.1 Définition

Si une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\Omega$ , alors on peut définir les fonctions :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

#### Définition 42.12

La fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  si elle admet des dérivées partielles en tout point de  $\Omega$  et si les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $\Omega$ .  
On note  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  l'ensemble des fonctions réelles de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

**Exemple 11.** Les formes linéaires coordonnées  $\varphi_1 : (x, y) \mapsto x$  et  $\varphi_2 : (x, y) \mapsto y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 42.13**

Toute fonction qui est une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composition d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  est encore de classe  $\mathcal{C}^1$  là où elle est définie.

**Définition 42.14**

On appelle fonction polynômiale de deux variables toute application  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}$  et  $(a_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$  une famille de réels.

De manière équivalente, cela revient à dire que  $P(x, y)$  peut s'écrire comme un polynôme en  $x$  où chaque coefficient est un polynôme en  $y$  :

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^n a_{ij} y^j \right) x^i = \underbrace{\sum_{i=0}^m \alpha_i(y) x^i}_{\text{polynôme en } x} \quad \text{avec } \alpha_i(y) = \underbrace{\sum_{j=0}^n a_{ij} y^j}_{\text{polynôme en } y}$$

**Exemple 12.** La fonction  $P(x, y) = 3x^2y^3 - x^5 + y + 8$  est polynômiale de deux variables.

**Définition 42.15**

On appelle fonction rationnelle de deux variables toute application de la forme  $\frac{P}{Q}$  où  $P$  et  $Q$  sont deux fonctions polynômiales de deux variables, avec  $Q$  différent du polynôme nul.

**Corollaire 42.16**

Toute fonction polynômiale en les variables  $x$  et  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
Toute fonction rationnelle en les variables  $x$  et  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son ensemble de définition (qui est toujours un ouvert).

*Démonstration.* En effet, ces fonctions sont des combinaisons linéaires, des produits et des quotients des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de l'Exemple 11, qui elles sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . □

**Exemple 13.** La fonction  $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2} + \sin(x)$  de l'Exemple 10 est de classe  $\mathcal{C}^1$  (sur  $\mathbb{R}^2$ ) par somme et composée de telles fonctions.

## 4.2 Gradient et retour sur la dérivée directionnelle

### Définition 42.17 – Petit-o

Soit  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(h, k) \in \Omega$ . On écrit

$$F(h, k) = \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o} (\|(h, k)\|)$$

pour signifier que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{F(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

La limite ci-dessus est sous-entendue épointée (i.e. pour  $(h, k) \neq (0, 0)$ ) afin que cela ait un sens.

**Remarque.** Comme  $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$ , on a toujours

$$|h| \leq \|(h, k)\| \quad \text{et} \quad |k| \leq \|(h, k)\|$$

**Exemple 14.** Montrer que  $h^2 = \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o} (\|(h, k)\|)$ .

### Définition 42.18 – Gradient

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . En tout point  $(x_0, y_0) \in \Omega$  en lequel  $f$  admet des dérivées partielles selon  $x$  et  $y$ , on définit le gradient de  $f$  comme étant le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  suivant :

Ainsi, en tout point  $A \in \Omega$ , on dispose d'un vecteur  $\nabla f(A)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Autrement dit  $\nabla f$  est une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $\nabla f$  est un champ de vecteurs. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , alors le gradient de  $f$  est défini en tout point de  $\Omega$ . Dans ce qui suit, on rappelle que  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 15.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 2x + \sin y$ . Calculer le gradient de  $f$  en  $(0, 0)$ .

**Théorème 42.19**

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . En tout point  $A \in \Omega$ , la fonction  $f$  admet un DL en  $A$  d'ordre 1 si pour tout  $\vec{\epsilon} = (h, k) \in \mathbb{R}^2$  tel que le point  $A + \vec{\epsilon}$  est dans  $\Omega$ , on a :

*Démonstration.* Preuve admise et non exigible. □

Comme  $A \in \Omega$  et que  $\Omega$  est ouvert, on a nécessairement  $A + \vec{\epsilon} \in \Omega$  pour  $\|\vec{\epsilon}\|$  assez petit. On peut réexprimer le DL de bien des manières, par exemple, avec  $A = (x_0, y_0)$  :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o} (\|(h, k)\|)$$

**Exemple 16.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 2x + \sin(y)$ . Déterminer le DL de  $f$  à l'ordre 1 en  $(0, 0)$ .

**Corollaire 42.20**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Alors en tout point  $A = (a, b) \in \Omega$  et pour tout  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f$  admet une dérivée directionnelle en  $A$  selon  $\vec{v}$ , et on a :

$$D_{\vec{v}}f(a, b) = \langle \nabla f(a, b) \mid \vec{v} \rangle = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

*Démonstration.*

Pour simplifier, on fait la preuve avec  $A = (a, b) = (0, 0)$ . Comme  $f \in \mathcal{C}^1$ ,  $f$  admet un développement limité en  $(0, 0)$ . On a donc :

$$f(h, k) = f(0, 0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o} (\|(h, k)\|)$$

$$\frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} = \frac{1}{t} \times \left[ tv_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + tv_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \underset{t \rightarrow 0}{o} (\|(tv_1, tv_2)\|) \right]$$

$$= v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \underset{t \rightarrow 0}{o} (\|(v_1, v_2)\|)$$

Par ailleurs, on a (pour  $t \neq 0$  assez proche de zéro) :

$$\frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} = \frac{1}{t} \times [f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)] \xrightarrow{t \rightarrow 0} v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Or, lorsque  $t$  tend vers 0, le vecteur  $t\vec{v} = (tv_1, tv_2)$  tend vers  $(0, 0)$ , de sorte qu'on peut utiliser le DL ci-dessus (par composition) avec  $D_{\vec{v}}f(a, b) = \langle \nabla f(a, b) \mid \vec{v} \rangle$ . □

**Exemple 17.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 2x + \sin(y)$ . Déterminer la dérivée directionnelle de  $f$  selon  $\vec{v} = (-3, 3)$  au point  $(0, \pi)$ .

**Corollaire 42.21**

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ , alors  $f$  est continue sur  $\Omega$ .

*Démonstration.*

Soit  $A \in \Omega$ . Il faut montrer que  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$ , ou encore que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(A + (h, k)) = f(A)$$

Or, quand  $(h, k)$  tend vers  $(0, 0)$ , il est clair que le petit- $o$  tend vers  $(0, 0)$ . De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle \nabla f(A) | (h, k) \rangle| \leq \|\nabla f(A)\| \times \underbrace{\|(h, k)\|}_{\xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0}$$

Or, comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a :

$$f(A + (h, k)) = f(A) + \langle \nabla f(A) | (h, k) \rangle + \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o} (\|(h, k)\|)$$

De sorte que  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(A + (h, k)) = f(A)$ .

□

**4.3 Interprétations du gradient**

Soit  $A \in \Omega$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Question : Dans quelle direction à partir de  $A$  est-ce que  $f$  augmente le plus vite ?

On ne s'intéresse qu'à une augmentation **infinitésimale**, localement autour de  $A$ . Formellement :

- On fixe  $r \ll 1$  et on s'intéresse aux points  $M$  à distance  $r$  de  $A$  (qui sont dans l'ouvert  $\Omega$  si on prend  $r$  assez petits).
- On cherche donc le point  $M$  qui vérifie  $\|\vec{AM}\| = r$  et tel que la variation  $f(M) - f(A)$  soit la plus élevée possible.

Pour simplifier les notations, on pose  $\vec{\epsilon} = \vec{AM}$ . On a donc  $r = \|\vec{\epsilon}\| \ll 1$ . Or, on a vu qu'**au premier ordre en  $\|\vec{\epsilon}\|$**  :

$$f(A + \vec{\epsilon}) - f(A) \approx \langle \nabla f(A) | \vec{\epsilon} \rangle$$

ce qui se réécrit, puisque  $\vec{\epsilon} = \vec{AM}$  :

$$f(M) - f(A) \approx \langle \nabla f(A) | \vec{AM} \rangle$$

Ainsi, au premier ordre,  $f(M) - f(A)$  sera le plus élevé lorsque le vecteur  $\vec{AM}$  est dans la même direction et avec le même sens que le gradient de  $f$  en  $A$ . On en déduit la remarque fondamentale suivante :

**Remarque.**  $\nabla f(A)$  représente la direction où  $f$  croît le plus vite, localement autour de  $A$ . En suivant la direction du gradient en chaque point, on peut ainsi atteindre un maximum local de  $f$  (si  $f$  est majorée).

Plus généralement :

- Si  $\overrightarrow{AM}$  est colinéaire et de même sens que  $\nabla f(A)$ , alors la variation  $f(M) - f(A)$  est positive et la plus grande possible.
- Si  $\overrightarrow{AM}$  est colinéaire et de sens opposé à  $\nabla f(A)$ , alors la variation  $f(M) - f(A)$  est négative et la plus grande possible (en valeur absolue).
- Si  $\overrightarrow{AM}$  est orthogonal à  $\nabla f(A)$ , alors  $\langle \nabla f(A) | \overrightarrow{AM} \rangle$  est nul, donc  $f(M) \approx f(A)$  au premier ordre.

### Définition 42.22

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , la courbe d'équation  $f(x, y) = \lambda$  est appelée la ligne de niveau  $\lambda$  de  $f$ .

La ligne de niveau de  $f$  s'obtient en intersectant la surface  $\mathcal{S}$  de  $f$  avec le plan  $z = \lambda$ .

**Exemple 18.** Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + \sin(3y)$ . Dans l'Exemple 1 au début du chapitre, la troisième figure présente la ligne de niveau  $z = 10$  de  $f$ .

### Théorème 42.23

Soit  $A \in \Omega$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Le gradient de  $f$  en  $A$  est orthogonal à la ligne de niveau qui passe par  $A$ , i.e. à la ligne de niveau  $z = \lambda$  avec  $\lambda = f(A)$ .

## 5 Règle de la chaîne

Soit  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables. On sait qu'alors  $f \circ g$  est dérivable et on dispose de la formule de dérivation :

$$(D) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

Le but de cette section est de généraliser cette formule lorsque  $f$  et/ou  $g$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Selon les cas, il faudra remplacer ou non :

- la **variable**  $x \in \mathbb{R}$
- les **dérivées** de  $(f \circ g)'$  et de  $g'$  (elles sont modifiées à l'identique car ces fonctions ont le même ensemble de départ).
- la **dérivée** de  $f'$ .

### 5.1 Dérivée de $f \circ g$ avec $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que  $g(\Omega) \subset I$ , de sorte que  $f \circ g$  a un sens.

- **Variable  $x$**  : puisque l'on a  $f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , il faut remplacer dans la formule (D) " $\forall x \in \mathbb{R}$ " par " $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ". Idem pour le "... ( $x$ )" qui deviendra "... ( $x, y$ )".
- **Dérivées de  $(f \circ g)'$  et  $g'$**  : puisque ce sont des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$ , cela n'a pas de sens d'écrire des dérivées classiques " $'$ ". On peut calculer une des deux dérivées partielles, par exemple  $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x}(x, y)$ .
- **Dérivée de  $f'$**  : puisqu'on a  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la seule façon de dériver  $f$  est de la manière classique : on conserve  $f'$ .

**Théorème 42.24**

Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $g(\Omega) \subset I$ . Alors  $f \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

**5.2 Dérivée de  $f \circ g$  avec  $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$** 

Puisqu'on a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on peut poser, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = (a(x), b(x))$$

avec  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- **Variable  $x$  :**
- **Dérivées de  $(f \circ g)'$  et  $g'$  :**

- **Dérivée de  $f'$  :** puisqu'on a  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , il y a deux façons de dériver  $f$  et on doit les conserver toutes les deux. Ainsi,  $f'$  devient  $\nabla f$  :

$$f'(g(x)) \rightsquigarrow \nabla f(g(x))$$

et le produit entre les réels  $f'(g(x))$  et  $g'(x)$  devient un produit scalaire entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  :

$$f'(g(x)) \times g'(x) \rightsquigarrow \langle \nabla f(g(x)) | g'(x) \rangle$$

**Théorème 42.25**

Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $g(I) \subset \Omega$ . Alors  $f \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

**5.3 Dérivée de  $f \circ g$  avec  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$** 

Puisqu'on a  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on peut poser, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$$

avec  $a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- **Variable  $x$  :**
- **Dérivées de  $(f \circ g)'$  et  $g'$  :**

- **Dérivée de  $f'$  :**

**Théorème 42.26**

Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $g(\Omega) \subset \Omega'$ . Alors  $f \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

**5.4 Exemples applicatifs**

**Exemple 19.** Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose

$$f(x, y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$$

Déterminer  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  en fonction des dérivées partielles de  $g$ .

## 6 Extrema locaux

### Définition 42.27

Soit  $X \subset \mathbb{R}^2$  une partie non vide, et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $A = (x_0, y_0) \in X$

- On dit que  $f$  admet un maximum en  $A$  si :  $\forall (x, y) \in X \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ .
- On dit que  $f$  admet un maximum local en  $A$  si :  $\exists r > 0 \quad \forall (x, y) \in X \cap \mathcal{B}(A, r) \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$
- On définit de même la notion de minimum (local) en  $A$ .
- On dit que  $f$  admet un extremum (local) en  $A$  si  $f$  admet un maximum (local) en  $A$  ou un minimum (local) en  $A$ .

Dit autrement,  $f$  admet un maximum en  $A$  si elle est majorée par  $f(A)$ , et admet un maximum local en  $A$  si elle est majorée par  $f(A)$  au voisinage de  $A$ .

### Définition 42.28

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $A = (x_0, y_0) \in \Omega$ . On dit que  $A$  est un point critique de  $f$  si  $\nabla f(A) = 0$ , càd si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

### Théorème 42.29

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $A \in \Omega$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $A$ , alors  $A$  est un point critique de  $f$ .

**Méthode**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Pour trouver un extremum local (resp. global) de  $f$  :

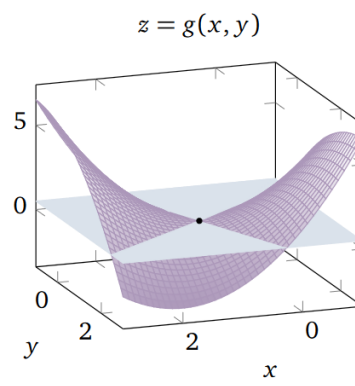
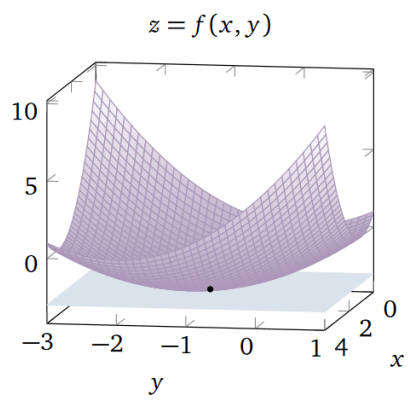
- On cherche les points critiques de  $f$ , qui sont des candidats pour être des extrema.
- Pour chaque point critique  $(x_0, y_0)$ , on étudie le signe local (resp. global) de  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ .

**Exemple 20.** Déterminer les extrema locaux de  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 3x + xy + y^2$ . Pour chacun d'eux, dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, local ou global.

La réciproque du Théorème 42.29 est fautive ! Un point critique n'est pas toujours un extremum local.

**Exemple 21.** On pose  $g : (x, y) \mapsto x^2 - x - xy - \frac{y^2}{2} + 2y$ . Montrer que  $f$  admet un point critique, mais aucun extremum local sur  $\mathbb{R}^2$ .

Voici le graphe des deux fonctions  $f$  et  $g$  des exemples précédents :





## 7 Méthodes pour les exercices

### Méthode

Pour montrer qu'une fonction  $f$  tend vers  $\ell$  en  $(x_0, y_0)$ , on peut :

- Repartir de la définition.
- Majorer  $|f(x, y) - \ell|$  par une expression qui dépend de  $\|(x - x_0, y - y_0)\|$  et qui tend vers 0 quand cette norme tend vers 0.

### Méthode

Dans la pratique, pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  :

- Si on dispose d'une expression unique de  $f$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$  :
  1. On dérive d'abord l'expression  $f(x, y)$  selon  $x$ , en considérant  $y$  comme une constante.
  2. Puis on remplace  $x$  et  $y$  dans l'expression de la dérivée par  $x_0$  et  $y_0$ .
- Sinon, on revient à la définition.